Степени

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0, m \in Z, n \in N, n > 1.$

Если $a > 0, b > 0, p \in Q, q \in Q,$ то

1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q};$

2) $a^p : a^q = a^{p+q};$

3) $\left(a^p\right)^q = a^{pq};$

4) $(ab)^p = a^p a^q;$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$

Корни

Если $a \geq 0, b \geq 0, n \in N, k \in Z,$ то

1) $\sqrt[n]{\mathrm{ab}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0);$

3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad (k > 0);$

4) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \quad (k > 0);$

5) $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k \ (a \neq 0 \text{ при } \mathrm{k} \leq 0).$

6) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, \text{если } n \text{ четно} \\ a, \text{если } n \text{ нечетно} \end{cases}$

Многочлен

$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ - многочлен с одной переменной

n (если $\mathrm{a}_0 \neq 0$) - степень многочлена (старшая степень x), $n \in N.$

x_0 - корень многочлена $\Leftrightarrow P(x_0) = 0.$

Схема Горнера деления P(x) на (x-x0)

$P(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$

x_0	Коэффициент при x^4 a_0	Коэффициент при x^3 a_1	Коэффициент при x^2 a_2	Коэффициент при x a_3	Свободный член a_4
	$b_0 = a_0$ коэффициент при x^3	$b_1 = b_0 x_0 + a_1$ коэффициент при x^2	$b_2 = b_1 x_0 + a_2$ коэффициент при x	$b_3 = b_2 x_0 + a_3$ свободный член	$b_4 = b_3 x_0 + a_4$ остаток

$$\overset{\text{Делимое}}{\underbrace{a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4}_{\text{многочлен 4-й степени}}} = \overset{\text{делитель}}{(x - x_0)} * \overset{\text{частное}}{\underbrace{\left(b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3\right)}_{\text{многочлен 3-й степени}}} + \overset{\text{остаток}}{\underbrace{b_4}_{\text{остаток}}}$$

Теорема Безу

Если x_0 - корень многочлена $P(x)$, то многочлен $P(x)$ делится на $(x - x_0)$ без остатка.

Пример. $P(x) = x^4 - 4x^2 + 4x + 8;$

разделить $P(x)$ на $x + 2$.

Решение. $P(x) = 1 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 8;\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2.$

-2	1	0	-4	4	8
	1	-2	0	4	0
	при x^3	при x^2	при x	св. член	остаток

$P(x) = x^4 - 4x^2 + 4x + 8 = (x + 2)(x^3 - 2x^2 + 4).$

Остаток = 0, т.к. - 2 - корень многочлена, т.е. $P(-2) = 0$.

Логарифмы

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \quad (b > 0, a > 0, a \neq 1).$

$a^{\log_a b} = b$ - основное логарифмическое тождество

Если $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0,$ то

1. $\log_a 1 = 0;$
2. $\log_a a = 1;$
3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y;$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$
5. $\log_a x^p = p \log_a x \ (p \in R).$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (b > 0, b \neq 1)$ – формула перехода к новому основанию

Функции

Числовой функцией с областью определения D называется соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу единственное число y, зависящее от x.

Обозначение: y = f(x)

Независимая переменная x – аргумент функции f.
Число y, соответствующее x – значение функции f в точке x.

График функции

График функции f – множество всех точек (x; y) координатной плоскости, где y=f(x), а x «пробегает» всю область определения функции f.

Область определения функции

Область определения функции – множество значений x, для которых выполнимы действия, указанные в правиле f.
Обозначается: ООФ или D(f).
С геометрической точки зрения ООФ есть проекция графика этой функции на ось OX.

Область значения функции

Область значений функции – множество значений функции f(x), которые она принимает при изменении x на ООФ.
Обозначается: ОЗФ или E(f).
С геометрической точки зрения ОЗФ – проекция графика на ось OY.

Четность и нечетность функций

Функция f называется четной, если для любых x из ООФ
$f(-x) = f(x)$

График четной функции симметричен относительно оси OY.

Функция f называется нечетной, если для любых x из ООФ $f(-x) = - f(x)$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Периодичность функций

Функция называется периодической с периодом $T \neq 0$, если для любого x из ООФ
$f(x + T) = f(x) = f(x - T)$.

Для построения графика периодичностью функции с периодом T достаточно провести построение на отрезке длиной T и полученный график параллельно перенести на расстояние nT вправо и влево вдоль оси OX (n – любое натуральное число).

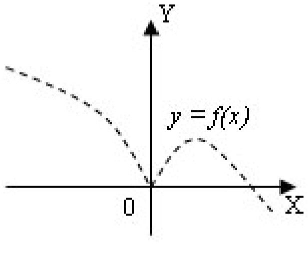
Возрастание, убывание функций

Функция f возрастает на множестве P, если для любых x1 и x2 из множества P, таких, что $x2 > x1$, выполнено неравенство $f(x2) > f(x1)$.

Функция f убывает на множестве P, если для любых x1 и x2 из множества P, таких, что $x2 > x1$, выполнено неравенство $f(x2) < f(x1)$.

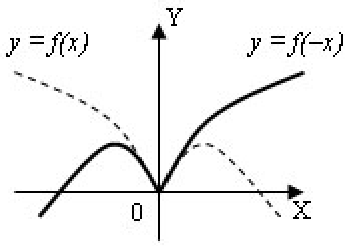
Преобразования графиков функций

Пусть дан график функции $y = f(x)$



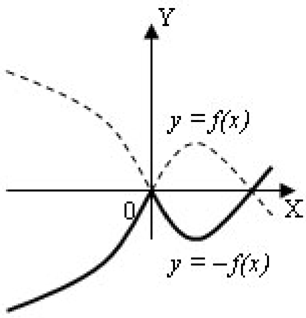
Тогда:

1 . График функции $y = f(–x)$ получается симметричным отображением графика $y = f(x)$

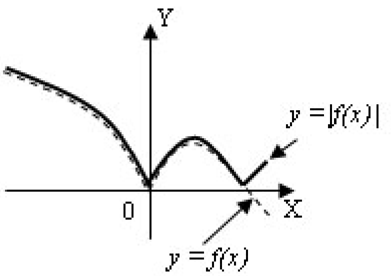


относительно оси OY:

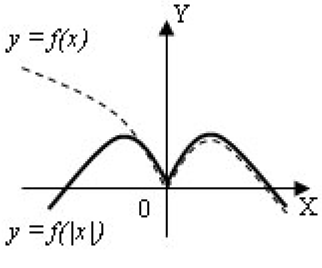
2 . График функции y = –f(x) получается симметричным отображением графика y = f(x) относительно оси OX:



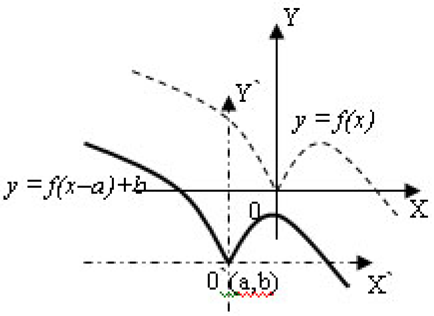
3 . График функции y = |f(x)| получается следующим образом: обводим ту часть графика функции y = f(x), которая лежит выше оси OX, а часть лежащую ниже отобразить симметрично оси OX:



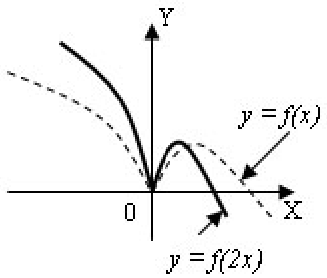
4 . График функции y =f(|x|) получается следующим образом: отбрасываем часть графика функции y = f(x), лежащую левее оси OY, обводим ту часть графика функции y = f(x), которая лежит правее оси OY и отображаем ее симметрично оси OY:



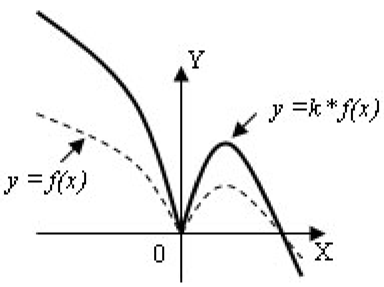
5 .График функции y =f(x–a) + b получается построением графика функции y = f(x) в новой системе координат X`0`Y`, где 0`(a, b), 0`X` || 0X, 0`Y` || 0Y:



6 . График функции y =f(m*x), m > 0, получается из данного растяжением в 1/m раз (если m < 0) от оси OY (вдоль оси OX) и сжатием в m раз (m > 1) к оси OY:



7 . График функции y =k* f(x), k > 0, получается из данного растяжением в k раз (k > 1) относительно оси OX (вдоль оси OY) и сжатием в 1/k раз (при k < 1) к оси OX:



Производная

Определение производной функции в точке x0:

Физический смысл производной:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Геометрический смысл производной: $f'(x_0) = V_{\text{мгн.}}(x_0)$

Правила вычисления производных

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
$$(f \cdot g)' = f'g + g'f$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$
$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$
$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Таблица производных

функция	k - const	x^α	e^x	a^x	$tg\ x$	$\ln x$	$\log_a x$	$\sin x$	$\cos x$	$ctg\ x$
производная	0	$\alpha x^{\alpha-1}$	e^x	$a^x \ln a$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x)$$

Первообразная (неопределенный интеграл). Таблица интегралов.

1	$\int 0dx = C$
2	$\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \forall \alpha \neq -1$
3	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
4	$\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C, \quad \forall a > 0, a \neq 1$
4a	$\int e^{x} dx = e^{x} + C$
5	$\int \cos x dx = \sin x + C$
6	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
7	$\int \sec^{2} x dx = \operatorname{tg} x + C$
8	$\int \operatorname{cos}ec^{2} x dx = -\operatorname{ctg} x + C$
9	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
10	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
11	$\int \sec x dx = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C = \ln\lvert\sec x + \operatorname{tg} x\rvert + C$
12	$\int \operatorname{cosec} x dx = \ln\left\lvert \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right\rvert + C = \ln\lvert\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x\rvert + C$
13	$\int \dfrac{dx}{x^{2} + a^{2}} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$
14	$\int \dfrac{dx}{a^{2} - x^{2}} = \dfrac{1}{2a} \ln\left\lvert \dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$
15	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^{2} - x^{2}}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$
16	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^{2} \pm a^{2}}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^{2} \pm a^{2}}\right\rvert + C$